指数関数ポテンシャルをもつバネで繋がれた一次元N粒子系 : 逆スペクトル法による一般解(2)

山崎, 進

指数関数ポテンシャルをもつバネで繋がれた一次元N粒子系——逆スペクトル法による一般解 (2)

埼玉大・理　山﨑　進

3月7日受理

§ 5. 解の一致(I)

まず(4・11)を示そう。簡単な式の変形により(補遺1)，

$$[\det(\mu E_{2N}-\mathscr{L}_{2N})]^2=\det(\mu^2 E_N-L_N)\cdot\det(\mu^2 E_N-\tilde{L}_N)\ , \quad (5\cdot1)$$

が導かれる。ここで$\tilde{L}_N$はL_Nの各要素を

$$\begin{cases}\tilde{\alpha}_j=a_{2j}\cdot a_{2j+1}\ , & (4\cdot1\mathrm{c})\\ \tilde{\beta}_j=a^2_{2j-1}+a^2_{2j}\ , & (4\cdot1\mathrm{d})\end{cases}$$

で置き換えたものである。$\tilde{L}_N$の固有値$\tilde{\lambda}_k$もまた大きさの順に番号づけられているものとする。固有値を用いて(5・1)を書き直せば

$$\Pi^N_{k=1}(\mu^2-\mu^2_k)^2=\Pi^N_{k=1}(\mu^2-\lambda_k)\cdot(\mu^2-\tilde{\lambda}_k)\ ,$$

となり，従って

$$\lambda_k=\tilde{\lambda}_k=\mu^2_k\ , \quad (4\cdot11)$$

でなければならない。　Q.E.D.

次に(4・11)を考慮すると

$$\mathscr{L}_{2N}\varphi_k=\mu_k\varphi_k\ , \quad (5\cdot2)$$

より

$$\mathscr{L}^2_{2N}\varphi_k=\lambda_k\varphi_k\ ,\ (k=1,\cdots 2N) \quad (5\cdot3)$$

が得られるが，これは

$$\int L_N\varphi^{\mathrm{odd}}_k=\lambda_k\varphi^{\mathrm{odd}}_k\ (k=1,\cdots,2N) \quad (5\cdot4\mathrm{a})$$

$$\left\lfloor\ \widetilde{L}_N\, \varphi_k^{\mathrm{even}} = \lambda_k\, \varphi_k^{\mathrm{even}}\ ,\ (\ k = 1, \cdots,\ 2N\ ) \right. \qquad (5\cdot 4\mathrm{b})$$

と書きかえられる。ここで

$$\lambda_{2N-k+1} \equiv \lambda_k\ ,\ (\ k = 1, \cdots, N\ )$$

とし，一般にベクトルψの第l成分を$\psi^{(l)}$と書くとき

$$\begin{cases} \varphi_k^{\mathrm{odd}} = {}^t(\varphi_k^{(1)},\ \varphi_k^{(3)},\ \cdots,\ \varphi_k^{(2N-1)}\ )\ , \\ \varphi_k^{\mathrm{even}} = {}^t(\varphi_k^{(2)}, \varphi_k^{(4)},\ \cdots,\ \varphi_k^{(2N)})\ , \end{cases}$$

である。ところで，対角行列

$$K = \mathrm{diag}(\ 1, -1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ -1\ )\ ,$$

により$\mathscr{L}_{2N}$は

$$K \mathscr{L}_{2N} \mathrm{K}^{-1} = -\mathscr{L}_{2N}\ ,$$

と変換されるので，（5・2）から

$$\mathscr{L}_{2N}\,(K\varphi_k) = -\mu_k\,(K\varphi_k)\ ,$$

が得られる。従って

$$K\varphi_k = \pm\varphi_{2N-k+1}\ ,\ (k = 1,\ \cdots,\ N\ ) \qquad (5\cdot 5)$$

即ち

$$\begin{cases} \varphi_k^{\mathrm{odd}} = \pm\varphi_{2N-k+1}^{\mathrm{odd}}\ , & (5\cdot 6\mathrm{a}) \\ \varphi_k^{\mathrm{even}} = \mp\varphi_{2N-k+1}^{\mathrm{even}}\ , & (5\cdot 6\mathrm{b}) \end{cases}$$

であり，（5・4）式はkの範囲を$k = 1,\ \cdots,\ N$としたものに同等となる。さらに（5・5）を用いると

$$< \varphi_k\ ,\ \varphi_{2N-k+1} > = 0\quad ,$$

より

$$\|\varphi_k^{\mathrm{odd}}\|^2 = \|\varphi_k^{\mathrm{even}}\|^2$$

が，また

$$<\varphi_k, \varphi_k> = 1,$$

より

$$\|\varphi_k^{\mathrm{odd}}\|^2 + \|\varphi_k^{\mathrm{even}}\|^2 = 1,$$

が得られるから

$$\|\varphi_k^{\mathrm{odd}}\|^2 = \|\varphi_k^{\mathrm{even}}\|^2 = \frac{1}{2} \quad ,$$

となる。従って L_N の規格化された固有ベクトル ψ_k は

$$\psi_k = \pm\sqrt{2}\,\varphi_k^{\mathrm{odd}} \quad ,$$

で与えられ，

$$(\psi_k^{(1)})^2 = 2\,(\varphi_k^{(1)})^2 \quad ,$$

即ち（4・13）が成りたつ。 Q.E.D.

§ 6. 解の一致(II)

関係式（4・14）を導こう。変換された初期値（$\alpha'(0)$, $\beta'(0)$ ）に対応する表式にプライムをつけて表わすことにする。まず

$$L_N'(0) = L_N(0) + \zeta_0 E_N \quad ,$$

より

$$\begin{cases} \lambda_k' = \lambda_k + \zeta_0, & (6\cdot1\mathrm{a}) \\ \psi_k'(0) = \pm\psi_k(0), & (6\cdot1\mathrm{b}) \end{cases}$$

従って

$$\frac{R'_k(0)}{\sum_{1\le k\le N} R'_k(0)} = \frac{R_k(0)}{\sum_{1\le k\le N} R_k(0)} \quad ,$$

即ち

$$R'_k(0) = \rho(0)\, R_k(0),$$

となり，（6・1a）（2・8b）と合わせて

$$R'_k(\tau) = \rho(\tau) R_k(\tau) \;, \tag{6・2}$$

を得る。ここで

$$\rho(\tau) = \rho(0)\ \mathrm{e}^{2\zeta_0\tau} \quad , \tag{6・3}$$

であり，$\rho(0)$は任意に選べるのでζ_0 に依らないものとする。また（6・1a)，（6・2)，（3・3）より

$$d'_i(\tau) = \sum_{1\le k\le N} \rho(\tau)\cdot R_k(\tau)\cdot(\lambda_k+\zeta_0)^{i-1} = \sum_{1\le j\le i} d_{i,j}\cdot d_j \,, \tag{6・4}$$

$$d_{i,j} = \rho\cdot {}_{i-1}\mathrm{C}_{j-1}\cdot\zeta_0^{i-j} \tag{6・5a}$$

となる。さらに

$$\frac{\dot P'_1}{P'_1} = \frac{\dot P_1}{P_1} + 2\zeta_0 \,, \tag{6・6}$$

が成りたつことも容易に示される（補遺２）。

さて，P_j の満たす関係式（3・8）を考慮すると（4・14b）は

$$\frac{\dot P'_{2j-1}}{P'_{2j-1}} - \frac{\dot P'_{2j-3}}{P'_{2j-3}} = \frac{\dot P_{2j-1}}{P_{2j-1}} - \frac{\dot P_{2j-3}}{P_{2j-3}} + 2\zeta_0 \quad ,$$

と書き換えられるが，（6・6)によりこれは

$$\frac{\dot P'_{2j-1}}{P'_{2j-1}} = \frac{\dot P_{2j-1}}{P_{2j-1}} + 2j\zeta_0 \,, \tag{6・7a}$$

に同等となる。等式（6・7a）の証明を補遺(3)に与える。次に（6・7a）を積分すれば，

$$P'_{2j-1}(\tau) = C_{2j-1}\cdot \mathrm{e}^{2j\zeta_0\tau}\cdot P_{2j-1}(\tau), \tag{6・7b}$$

が得られる。積分定数 C_{2j-1} はζ_0 に依らない（補遺４）ので，（6・7b）において$\zeta_0 = \tau = 0$とおき（3・6）を代入することにより

$$C_{2j-1} = \rho(0)^j \quad , \tag{6·8}$$

となる。これらを考慮すれば（4・14a）を確かめることは容易である。

埼玉大学において研究を続けるにあたり，伊藤大介先生には筆者の種々勝手な要望に快く応じて頂きました。あつくお礼申し上げます。

<u>補遺(1)</u>，等式（5・1）の導出。

まず

$$(-1)^{2N}\det(\mu_k E_{2N}-\mathscr{L}_{2N}) = \det(-\mu_k E_{2N}+\mathscr{L}_{2N}),$$

及び

$$\mu_k = -\mu_{2N-k+1} ,$$

より，二つの多項式$\det(\mu E_{2N}-\mathscr{L}_{2N})$と$\det(\mu E_{2N}+\mathscr{L}_{2N})$とは総ての零点を共有し，従って両者が等しいことがわかる。それ故

$$[\det(\mu E_{2N}-\mathscr{L}_{2N})]^2 = \det(\mu^2 E_{2N}-\mathscr{L}^2_{2N}), \tag{6·9}$$

となるが，（4・1）を考慮すると

$$\mathscr{L}^2_{2N} = \begin{pmatrix}
\beta_1 & 0 & \alpha_1 & & & & & \\
0 & \tilde{\beta}_1 & 0 & \tilde{\alpha}_1 & & & & \\
\alpha_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \alpha_2 & & & \\
 & \tilde{\alpha}_1 & 0 & \tilde{\beta}_2 & 0 & \ddots & & \\
 & & \alpha_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \tilde{\alpha}_{N-1} \\
 & & & & \ddots & \ddots & \beta_N & 0 \\
 & & & & & \tilde{\alpha}_{N-1} & 0 & \tilde{\beta}_N
\end{pmatrix} ,$$

と書かれるので(6・9)式右辺は

$$\det \begin{pmatrix} (\mu^2 E_N - L_N) & 0 \\ 0 & (\mu^2 E_N - \widetilde{L}_N) \end{pmatrix}$$

と変形され，従って(5・1)が成りたつ。

補遺(2)，(6・6)式の導出。

$$P_1' = \sum R_k'(0) \exp \{2(\lambda_k + \zeta_0)\tau\} .$$

より

$$\dot{P}_1' = \sum 2\lambda_k R_k'(0) \exp \{2(\lambda_k + \zeta_0)\tau\} + 2\zeta_0 P_1' \quad .$$

従って

$$\frac{\dot{P}_1'}{P_1'} = \frac{\sum 2\lambda_k R_k'(0) \exp(2\lambda_k \tau)}{\sum R_k'(0) \exp(2\lambda_k \tau)} + 2\zeta_0 = \frac{\dot{P}_1}{P_1} + 2\zeta_0 \quad .$$

補遺(3)，(6・7a)式の証明

P_j の表示式(3・5a)を用いる。

$$\dot{d}_\ell = 2d_{\ell+1} ,$$

であるから(6・7a)は

$$\frac{\det (\!(d_1', d_2', \cdots, \dot{d}_{j-1}', d_{j+1}')\!)}{\det (\!(d_1', d_2', \cdots, d_{j-1}', d_j')\!)} = \frac{\det (\!(d_1, d_2, \cdots, d_{j-1}, d_{j+1})\!)}{\det (\!(d_1, d_2, \cdots, d_{j-1}, d_j)\!)} + j\zeta_0 , \qquad (6\cdot7c)$$

となる。ここで

$$(\!(d_1, d_2, \cdots, d_j)\!) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \cdots\cdots & d_j \\ d_2 & d_3 \cdots\cdots & d_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_j & d_{j+1} \cdots\cdots & d_{2j-1} \end{bmatrix} ,$$

とし，$(\!(d_1, d_2, \cdots, d_{j-1}, \mathrm{d}_{j+1})\!)$ 等についても同様である。二つの一次方程式系

$$\sum_{0\le k\le j-1} d_{i+k}\, x_{k+1} = \mathrm{d}_{j+i} \quad (i=1,\cdots, j) \tag{6・10a}$$

及び

$$\sum_{0\le k\le j-1} d'_{i+k}\, x'_{k+1} = d'_{j+i} \quad , (\quad〃\quad) \tag{6・11}$$

を考えると，（6・7c）は

$$x'_j = x_j + j\zeta_0 , \tag{6・7d}$$

と書かれる。そこで，

$$x'_{k+1} = \sum_{k\le l\le j-1} {}_{l}C_{l-k}(-\zeta_0)^{l-k}\cdot x_{l+1} - {}_{j}C_{j-k}(-\zeta_0)^{j-k} , \tag{6・12}$$
$$(k=0, \cdots, j-1)$$

を以下に示そう。$k=j-1$のとき，明らかに（6・12）は（6・7d）に一致する。

まず次の（L．1）～（L．3）が成りたつ。

<u>（L．1）</u>，

$$\sum_{0\le q\le l} (-1)^{i+q}\, {}_{l}C_q \cdot {}_{i+q}C_m = \begin{cases} {}_{i}C_{m-l} \ ; \ l\le m\le l+i & (6・13a) \\ 0 \ ; \ 0\le m\le l-1, & (6・13b) \end{cases}$$

ただし，i，$l\ge 0$とし，一般に

$${}_{i}C_{j} = 0 \ ; \ i<j$$

と約束する。

<u>（L．2）</u>，

$$\sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}C_p(-\zeta_0)^p\cdot d_{l-1+i-p,m}$$

$$= \begin{cases} d_{i,m-(l-1)} \ ; \ l\le m\le l-1+i & (6・14a) \\ 0 \ ; \ 1\le m\le l-1 & (6・14b) \end{cases}$$

ただし，i，$l\ge 1$とし，

$$d_{i,j} = 0 \ ; \ i<j , \tag{6・5b}$$

である。

(L. 3),

$$\sum_{1\leq k\leq i-1} d_{i,k}\, d_{\ell+k-1} + d_{\ell+i-1,\ell+i-1}\, d_{\ell+i-1} = \sum_{0\leq p\leq \ell-1} {}_{\ell-1}C_p(-\zeta_0)^p \cdot d'_{\ell+i-1-p} \qquad (6\cdot15)$$

ただし，i，$\ell\geq1$とし，$i=1$のとき(6・15)左辺は第二項のみとする。

(L. 1)の証明，ℓに関する帰納法による。$\ell=0$及び$\ell=1$の各場合に(6・13)を確かめることは容易である。ℓ(≥1)のときに(6・13)を仮定し，$\ell+1$の場合を証明しよう。

$$\sum_{0\leq q\leq \ell+1}(-1)^{\ell+1+q}\,{}_{\ell+1}C_q\cdot{}_{i+q}C_m = -\sum_{0\leq q\leq \ell}(-1)^{\ell+q}\,{}_{\ell}C_q\cdot{}_{i+q}C_m - \sum_{1\leq q\leq \ell}(-1)^{\ell+q}\,{}_{\ell}C_{q-1}\cdot{}_{i+q}C_m + {}_{i+\ell+1}C_m \qquad (6\cdot16)$$

であるが,

$$\text{右辺第2項} = -\sum_{0\leq q\leq \ell-1}(-1)^{\ell+q+1}\,{}_{\ell}C_q\cdot{}_{i+q+1}C_m = \sum_{0\leq q\leq \ell}(-1)^{\ell+q}\,{}_{\ell}C_q\cdot{}_{i+q+1}C_m - {}_{i+\ell+1}C_m,$$

なので

$$(6\cdot16)\text{右辺} = \begin{cases} \sum_{0\leq q\leq \ell}(-1)^{\ell+q}\,{}_{\ell}C_q\cdot{}_{i+q}C_{m-1};\ m\geq1 & (6\cdot17\text{a}) \\ 0 \qquad ;\ m=0\ , & (6\cdot17\text{b}) \end{cases}$$

となる。いま$1\leq m\leq(\ell+1)-1$とすると$0\leq m-1\leq\ell-1$であり(6・13b)により(6・17b)$=0$ がわかる。次に$\ell+1\leq m\leq(\ell+1)+i$とすると$\ell\leq m-1\leq\ell+i$，従って(6・13a)により(6・17a)$={}_{i}C_{m-(\ell+1)}$となる。 Q.E.D.

(L. 2)の証明，qに代えて

$p=\ell-q$,

を用いて(6・13)を書き直し，さらにi，ℓ，mを改めて$i-1$．$\ell-1$、$m-1$と表わせば(L. 1)は

$$\sum_{0\leq p\leq \ell-1}(-1)^p\,{}_{\ell-1}C_p\cdot{}_{\ell-2+i-p}C_{m-1} = \begin{cases} {}_{i-1}C_{m-\ell};\ \ell\leq m\leq \ell-1+i & (6\cdot18\text{a}) \\ 0 \quad ;\ 1\leq m\leq \ell-1\ , & (6\cdot18\text{b}) \end{cases}$$

と書ける。一方，

$$(6\cdot 14)\,左辺 = \rho \sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_p(-\zeta_0)^p \cdot {}_{l-2+i-p}\mathrm{C}_{m-1} \cdot \zeta_0^{l-1+i-p-m}$$

$$= \rho \left\{ \sum_{0\le p\le l-1} (-1)^p\, {}_{l-1}\mathrm{C}_p \cdot {}_{l-2+i-p}\mathrm{C}_{m-1} \right\} \cdot \zeta_0^{i-m+l-1}$$

となり，（6・18）を考慮すればこれが（6・14）右辺に等しいことがわかる。　Q.E.D.

<u>（L．3）の証明，</u>

$$m = l + k - 1\,,$$

とおくと

$$\sum_{1\le k\le i-1} d_{i,k}\, d_{l+k-1}$$

$$= \sum_{l\le m\le l+i-2} d_{i,m-(l-1)}\, d_m$$

$$= \sum_{1\le m\le l+i-2} \left\{ \sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_p(-\zeta_0)^p \cdot d_{l+i-1-p,m} \right\} d_m$$

$$= \sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_p(-\zeta_0)^p \left\{ \sum_{1\le m\le l+i-2} d_{l+i-1-p,m}\, d_m \right\} \qquad (6\cdot 19\mathrm{a})$$

が得られる。ここで第二式より第三式への変形に（L．2）を利用した。一方，（6•5b）により

$$d_{l+i-1,\,l+i-1} = \sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_p(-\zeta_0)^p d_{l+i-1-p,\,l+i-1}\,, \qquad (6\cdot 19\mathrm{b})$$

と書ける。従って $i \ge 2$ として

$$(6\cdot 15)\,左辺 = \sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_p(-\zeta_0)^p \left\{ \sum_{1\le m\le l+i-1} d_{l+i-1-p,m} \cdot d_m \right\}$$

$$= \sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_p(-\zeta_0)^p \left\{ \sum_{1\le m\le l+i-1-p} d_{l+i-1-p,m} \cdot d_m \right\}$$

$$= \sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_p(-\zeta_0)^p d'_{l+i-1-p}\,,$$

が得られる。$i = 1$ のときは（6・19b）により

$$(6\cdot 15)\,左辺 = \sum_{0\le p\le l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_p(-\zeta_0)^p d_{l-p,l} \cdot d_l$$

であるが，（L. 2）によりこれは

$$= \sum_{1\leq m\leq l}\ \sum_{0\leq p\leq l-1}\ {}_{l-1}C_p(-\zeta_0)^p\, d_{l-p,m}\cdot d_m$$

$$= \sum_{0\leq p\leq l-1}\ {}_{l-1}C_p(-\zeta_0)^p \left\{ \sum_{1\leq m\leq l-p} d_{l-p,m}\cdot d_m \right\}$$

となり（6・15）右辺に等しい。　　Q.E.D.

さて，一次方程式系（6・10a）を

$$\langle\!\langle d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_j \rangle\!\rangle\cdot {}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_j) = {}^t(d_{j+1},\ d_{j+2},\ \cdots,\ d_{2j}), \qquad (6\cdot 10b)$$

と書き，$d_{i,k}$を（i，k）要素にもつ三角行列Dを両辺に作用させる。

$[D\cdot\langle\!\langle d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_j \rangle\!\rangle]$の（$i$，$l$）要素

$$= \sum_{1\leq k\leq i} d_{i,k}\cdot d_{l+k-1}$$

$$= \sum_{1\leq k\leq i-1} d_{i,k}\cdot d_{l+k-1} + d_{i,i}\cdot d_{l+i-1}, \qquad (6\cdot 20)$$

であるが，（6・5a）より

$$d_{i,i} = d_{l+i-1,\,l+i-1} = \rho,$$

従って（L.3）により

$$(6\cdot 20) = \sum_{0\leq p\leq l-1}\ {}_{l-1}C_p(-\zeta_0)^p\cdot d'_{l+i-1-p},$$

となる。従って

$[D\cdot\langle\!\langle d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_j \rangle\!\rangle\cdot {}^t(x_1,\ \cdots,\ x_j)]$の第$i$要素

$$= \sum_{1\leq l\leq j} \left\{ \sum_{0\leq p\leq l-1}\ {}_{l-1}C_p(-\zeta_0)^p\, d'_{l+i-1-p} \right\} x_l, \qquad (6\cdot 21)$$

を得る。一方，

$[D\cdot {}^t(d_{j+1},\ d_{j+2},\ \cdots,\ d_{2j})]$の第$i$要素$= \sum_{1\leq k\leq i} d_{i,k}\cdot d_{j+k}$

$$= \sum_{1\leq k\leq i-1}' d_{i,k}\, d_{(j+1)+k-1} + d_{(j+1)+i-1,(j+1)+i-1} \cdot d_{(j+1)+i-1} \quad ,$$

であり，再び（L.3）を用いると

$$= \sum_{0\leq p\leq j} {}_{j}\mathrm{C}_{p}(-\zeta_0)^{p}\cdot d'_{j+i-p} \, . \tag{6・22}$$

となる。（6・21），（6・22）より

$$\sum_{1\leq l\leq j} \left\{ \sum_{0\leq p\leq l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_{p}(-\zeta_0)^{p}\, d'_{l+i-1-p} \right\} x_l$$

$$= \sum_{0\leq p\leq j} {}_{j}\mathrm{C}_{p}(-\zeta_0)^{p}\cdot d'_{j+i-p} \, , \tag{6・23}$$

を得る。この式の左辺を，pに代えて

$$k = l-1-p \, ,$$

で表わせば

$$左辺 = \sum_{1\leq l\leq j} \left\{ \sum_{0\leq k\leq l-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_{l-1-k}(-\zeta_0)^{l-1-k}\cdot d'_{i+k} \right\}\cdot x_l$$

$$= \sum_{0\leq k\leq j-1}' d'_{i+k} \left\{ \sum_{k+1\leq l\leq j} {}_{l-1}\mathrm{C}_{l-1-k}(-\zeta_0)^{l-1-k}\cdot x_l \right\} \quad ,$$

となり，右辺をpに代えて

$$k = j-p \quad ,$$

で表わせば

$$右辺 = \sum_{0\leq k\leq j-1}' {}_{j}\mathrm{C}_{j-k}(-\zeta_0)^{j-k}\cdot d'_{i+k} + d'_{i+j} \quad ,$$

となる。従って（6・23）は

$$\sum_{0\leq k\leq j-1} d'_{i+k} \left\{ \sum_{k+1\leq l\leq j} {}_{l-1}\mathrm{C}_{l-1-k}(-\zeta_0)^{l-1-k}\cdot x_l - {}_{j}\mathrm{C}_{j-k}(-\zeta_0)^{j-k} \right\} = d'_{j+i}$$

と書き直されるが，これを（6・11）と比べれば（6・12）が得られる。　Q.E.D.

補遺(4)，C_{2j-1} が ζ_0 に依らないことの証明。

（6・7b）より

$$\frac{d}{d\zeta_0}\ln C_{2j-1} = \frac{1}{P'_{2j-1}}\left(\frac{\partial P'_{2j-1}}{\partial\zeta_0} - 2j\tau P'_{2j-1}\right)$$

$$= \frac{1}{P'_{2j-1}}\sum_{1\le k\le j}\det(\!(d'_1, \cdots, d'_{k-1}, (k-1)d'_{k-1}, d'_{k+1}, \cdots, d'_j)\!), \qquad (6\cdot 24)$$

である。ここで,

$$(\!(d'_1, \cdots, d'_{k-1}, (k-1)d'_{k-1}, d'_{k+1}, \cdots, d'_j)\!),$$

は $(\!(d'_1, d'_2, \cdots, d'_j)\!)$ の第 k 列を

$${}^t((k-1)d'_{k-1}, kd'_k, \cdots, (k-1+j-1)d'_{k-1+j-1}),$$

で置き換えたものを表わし，第二式から第三式への変形には，表式（3・5a）および

$$\frac{\partial d'_i}{\partial\zeta_0} = 2\tau d'_i + (i-1)d'_{i-1},$$

を用いた。そこで

$$\sum_{1\le k\le j}\det(\!(d'_1, \cdots, d'_{k-1}, (k-1)d'_{k-1}, d'_{k+1}, \cdots, d'_j)\!) = 0 \qquad (6\cdot 25)$$

を示そう。*)　いま，$A = (\!(d'_1, d'_2, \cdots, d'_j)\!)$ の (i, k) 要素

$$a_{i,k} = d'_{i+k-1},$$

の余因子を $A_{i,k}$ で表わせば,

$$(6\cdot 25)\text{左辺} = \sum_{1\le k\le j}\sum_{1\le i\le j}(k-1+i-1)d'_{k-1+i-1}A_{i,k}$$

$$= \sum_{1\le k\le j}(k-1)\left(\sum_{1\le i\le j}d'_{i+(k-1)-1}A_{i,k}\right)$$

$$+ \sum_{1\le i\le j}(i-1)\left(\sum_{1\le k\le j}d'_{(i-1)+k-1}A_{i,k}\right)$$

---

*）以下の証明は北原清志氏（工学院大・数学）によるものです。

$$= \sum_{2\leq k\leq j}(k-1)\left(\sum_{1\leq i\leq j} a_{i,k-1}A_{i,k}\right) + \sum_{2\leq i\leq j}(i-1)\left(\sum_{1\leq k\leq j} a_{i-1,k}A_{i,k}\right)$$

となるが,

$$\sum_{1\leq i\leq j} a_{i,k-1}A_{i,k} \quad \left(\sum_{1\leq k\leq j} a_{i-1,k}A_{i,k}\right)$$

はAの第k列（第i行）を$k-1$列（$i-1$行）で置き換えてできる行列式なので，0に等しい。 Q.E.D.